Elément de cours des exercices

Borne supérieure, borne inférieure

Si besoin, on pourra consulter le vocabulaire de base qui est rappelé en fin de page.

1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition (Borne supérieure). Si l'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément M, on dit que M est la **borne supérieure** de A et on note

$$M = \sup(A).$$

Cette borne supérieure est unique.

Définition (Borne supérieure d'une fonction). Pour une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on définit, lorsqu'elle existe, la borne supérieure de f sur I par

$$\sup_I f = \sup\{f(x), x \in I\}.$$

Définition (Borne inférieure). Si l'ensemble des minorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément m, on dit que m est la **borne inférieure** de A et on note

$$m = \inf(A).$$

Cette borne inférieure est unique.

2 Propriété de la borne supérieure

Théorème (Propriété de la borne supérieure). Toute partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Propriété (Caractérisation de la borne supérieure). Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. La borne supérieure de A, $\sup A$ est l'unique nombre réel tel que :

(i) Si $a \in A$, alors $a \leq \sup A$; ($\sup A$ est un majorant de A)

(ii) Pour tout nombre $x < \sup A$, il existe un nombre $a \in A$ tel que $x < a$ (c'est le plus petit des majorants).

On déduit de (ii) une formulation très utile d'une propriété de la borne supérieure.

$$(\forall \varepsilon > 0), (\ \exists a \in A) \quad \sup A - \varepsilon < a < \sup A.$$

Nous laissons au lecteur le soin de formuler une propriété analogue pour la borne inférieure.

Théorème (Propriété de la borne supérieure d'une fonction).

Si f est une fonction à valeurs réelles **continue** sur un intervalle $[a, b]$ **fermé borné**, alors elle est bornée et atteint ses bornes ; en particulier il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(c).$$

3 Exemples

- Si une partie admet un plus grand élément, c'est sa borne supérieure, par exemple, $\sup]0, 1] = 1$.
- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, $\sup[a, b[= b$.
- Un exemple de borne supérieure pour une fonction :

  $$\sup_{]0,\infty[} \arctan = \sup\{\arctan x, x \in]0, \infty[\} = \frac{\pi}{2}.$$

  On remarquera que cette borne supérieure n'est pas atteinte, l'intervalle $]0, \infty[$ n'étant ni fermé ni borné.
- Exemples de borne supérieure pour une fonction continue sur un intervalle :

  $$\sup_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos = \sup\{\cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]\} = 1 = \cos(0).$$

  Par contre, pour

  $$\sup_{]0,\frac{\pi}{2}]} \cos = \sup\{\cos x, x \in]0, \frac{\pi}{2}]\} = 1,$$

  on remarquera que cette borne supérieure n'est pas atteinte sur l'intervalle considéré.

Retour en début de page

4 Vocabulaire

Rappels :

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

– On dit que m est un **majorant de** A (respectivement un **minorant**) dans $\mathbb{R}$ est :

$$\forall a \in A,\, a \leq m \text{ (respectivement } \forall a \in A,\, m \leq a).$$

– On dit que A est **majorée** (resp. **minorée**) dans $\mathbb{R}$ si A admet au moins un majorant (resp. un minorant) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A,\, a \leq m \text{ (resp. } \exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A,\, m \leq a).$$

– On dit que A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

– On dit que x est **le plus grand élément** (resp. **le plus petit élément**) de A, si x est un majorant (resp. un minorant) de A et si, de plus, $x \in A$.

– On note qu'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ n'a pas nécessairement de plus grand (resp. plus petit) élément, par exemple, $]0, 1[$.
Par contre, si il y a un plus grand (resp. plus petit) élément, celui-ci est unique et c'est la borne supérieure (resp. inférieure).

Retour en début de page