Méthodes et techniques des exercices

Étudier la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

PREMIÈRE ETAPE

On cherche des intervalles ouverts aussi grands que possible sur lesquels la fonction donnée est obtenue comme somme, produit, quotient, composée de fonctions dont on sait déjà qu'elles sont dérivables.

Voici quelques résultats utiles dans cette perspective :

- La somme de fonctions dérivables est dérivable et sa dérivée est la somme des dérivées.
- Le produit de deux fonctions dérivables est dérivable et la dérivée de uv est $u'v + uv'$.
- Le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable sur tout intervalle où le dénominateur est non nul et la dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.

– Ci-dessous le tableau des dérivées des principales fonctions :

Si f est la fonction donnée par	Sur l'intervalle	Elle admet une dérivée f' telle que
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^\star$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$\left](n-\frac{1}{2})\pi; (n+\frac{1}{2})\pi\right[, n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$]-1; 1[$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$]-1; 1[$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$]-\infty; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

DEUXIÈME ETAPE

On examine les points qui sont aux extrémités des intervalles précédents. Pour ces points, on revient à la définition du nombre dérivée d'une fonction :

DÉFINITION (Nombre dérivé). Soit f est une fonction définie dans un intervalle ouvert, et soit a un point de cet intervalle.
On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe.
Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivée** de f au point a.
La **fonction** qui associe à a le nombre dérivée de f au point a s'appelle **la dérivée** de f.

Il est parfois utile de distinguer le nombre dérivée à droite et le nombre dérivée à gauche :

DÉFINITION (Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite). Le **nombre dérivé à gauche** de la fonction f au point a est la limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et le **nombre dérivé à droite** au point a est la limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si ces deux nombres dérivées existent et sont égaux, c'est le nombre dérivée de la fonction.

REMARQUE.

- Si une fonction est dérivable, elle est à fortiori continue. C'est pourquoi la recherche des intervalles où une fonction est continue et des intervalles où elle est dérivable se fait le plus souvent simultanément. De même pour des fonctions indéfiniment dérivables sauf en quelques points, on recherche d'emblée les intervalles où elle est indéfiniment dérivable.
- Il n'est pas rare de rencontrer des abus de langage concernant la dérivée. Dans le texte précédent le mot "dérivée" désigne la fonction qui à x associe le nombre dérivé en x. Mais on rencontre l'expression "dérivée en x" pour désigner "le nombre dérivé en x".