Méthodes et techniques des exercices

Majorer, minorer

Quelques méthodes de majoration ou de minoration

Les outils pour obtenir une majoration ou une minoration de fonction sont adaptés aux différentes formes de fonctions.

1) Pour majorer une fonction f sur $D \subset \mathbb{R}$, on peut minorer $-f$ sur D.
Par exemple, la fonction $x \mapsto \cos x$ étant minorée par -1 sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto 2 - \cos x$ est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.
2) Pour majorer ou minorer une somme de fonctions, on utilise souvent les deux inégalités triangulaires : $||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.
3) Pour majorer un produit de fonctions positives sur $D \subset \mathbb{R}$, on majore chacune des fonctions sur D.
4) Pour majorer une fonction positive de la forme $\dfrac{1}{f}$ sur $D \subset \mathbb{R}$, on minore la fonction f sur D.
5) Pour majorer un quotient $\dfrac{f}{g}$ de fonctions positives sur $D \subset \mathbb{R}$, on majore f sur D et on minore g sur D.
6) Si les fonctions ne sont pas positives sur D, il est préférable de majorer la valeur absolue du produit et de préciser ensuite, si nécessaire, le signe de la fonction. Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ car $|\sin x| \leqslant 1$ et $x^2 + 1 \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}$, mais le signe de la fonction est variable. Pour obtenir un encadrement de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x - 2}$ sur $\mathbb{R}$, on remarque que c'est une fonction négative et que $1 \leqslant |2 - \sin x| \leqslant 3$, ce qui donne $-1 \leqslant \dfrac{1}{\sin x - 2} \leqslant -\dfrac{1}{3}$.
7) L'étude des variations d'une fonction peut permettre de la majorer ou de la minorer ; quand une telle étude est faisable, on peut même trouver des bornes supérieures et inférieures. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ a pour dérivée $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$; elle croît donc de 0 pour $x = 0$ à $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ pour $x = 1$, puis décroît jusqu'à 0 ; donc f admet $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ comme maximum et 0 comme minimum sur $\mathbb{R}_+$.
8) L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir des majorations : on se donne une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ayant une dérivée f' sur l'intervalle $]a, b[$ et on suppose que f' est bornée sur $]a, b[$. On a alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant (b - a) \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$$

Par exemple, on a $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout x réel car $\sin(0) = 0$ et car la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

Majoration ou minoration par des fonctions

Pour effectuer des majorations ou des minorations, il est souvent utile de majorer ou de minorer par des fonctions plus simples. Quelques résultats sont classiques.

1) $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout x réel ;
1) $\sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$ pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;
1) $\ln(x+1) \leqslant x$ pour tout $x > 0$;
1) $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout x réel ;

Par exemple, on obtient $\mathrm{e}^{2x/\pi} \leqslant \mathrm{e}^{\sin x} \leqslant \mathrm{e}^x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.