Méthodes et techniques des exercices

Primitives d'un polynôme en sinus et cosinus

Dans le cas où R est un polynôme, le calcul d'une primitive se ramène au calcul de termes du type

$$\int \sin^p(x)\cos^q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer ce terme :

– si p est impair, on écrit $p = 2p' + 1$ d'où

$$\sin^p(x)\cos^q(x) = \cos^q(x)(1-\cos^2(x))^{p'}\sin(x)$$

On fait alors le changement de variable $t = \cos(x)$ et on se ramène alors au calcul d'une primitive de la fonction $t \mapsto -t^q(1-t^2)^{p'}$.

– si q est impair, on utilise le même principe en faisant le changement de variable $t = \sin(x)$: voir l'exemple 1

– si p et q sont pairs, on *linéarise* le terme $\sin^p(x)\cos^q(x)$, c'est-à-dire qu'on le transforme, au moyen des formules d'Euler ou de formules de trigonométrie, en une somme de terme de la forme $\sin(\alpha x)$ et $\cos(\beta x)$: voir l'exemple 2

Exemple. 1

Calculer une primitive de $x \mapsto \sin^2(x)\cos^3(x)$. On écrit

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2(x)(1-\sin^2(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t \\
&\quad \text{avec le changement de variable } t=\sin(x) \\
&= \int (t^2 - t^4)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 \\
&= \frac{1}{3}(\sin(x))^3 - \frac{1}{5}(\sin(x))^5
\end{aligned}$$

Retour

Exemple. 2

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin^2(x)\cos^2(x)$.

On commence par linéariser, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \text{ avec les formules d'Euler} \\
&= -\frac{1}{16}(e^{2ix}-e^{-2ix})^2 \text{ en utilisant } (a-b)(a+b)=a^2-b^2 \\
&= -\frac{1}{16}(e^{4ix}+e^{-4ix}-2) \\
&= -\frac{1}{8}(\cos(4x)-1)=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi utiliser les formules de trigonométrie $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(4x)=1-2\sin^2(2x)$:

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2(2x) \\
&= \frac{1}{8}(1-\cos(4x))
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin(4x)$$

Retour