Elément de cours des exercices

Séries semi-convergentes

1 Convergence absolue

DÉFINITION. Une série de nombres complexes $\sum u_n$ est dite absolument convergente quand la série des modules des u_n, $\sum |u_n|$, est convergente.

PROPOSITION. Toute série absolument convergente de nombres complexes est convergente.

EXEMPLE. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente puisque la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

Attention, la réciproque de la proposition est fausse, une série convergente n'est pas toujours absolument convergente. C'est le cas de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ qui n'est pas absolument convergente, mais qui converge comme on le verra ci-dessous.

DÉFINITION. On appelle série semi-convergente toute série convergente qui n'est pas absolument convergente.

2 Séries alternées

DÉFINITION. On appelle série alternée toute série de nombres réels $\sum u_n$ telle que $u_n = (-1)^n a_n$, la suite (a_n) étant de signe constant.

Critère spécial des séries alternées (Leibniz)

Toute série alternée $\sum u_n$ telle que la suite $(|u_n|)$ décroît et tend vers 0, est convergente. De plus, en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, on a, pour tout n, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$ et R_n a le signe de u_{n+1}.

EXEMPLE. Pour tout $\alpha > 0$, les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ (séries de Riemann alternées) sont convergentes, mais les séries avec $\alpha \in]0,1]$ sont seulement semi-convergentes.

3 Théorème d'Abel

Grâce au critère de Cauchy, on démontre le résultat suivant.

Théorème (Règle d'Abel)

Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui converge vers 0. Soit (b_n) une suite de nombres complexes telle que les sommes partielles de la série de terme général b_n soient bornées. Alors, la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.

REMARQUE. Ce théorème redonne comme cas particulier (avec $b_n = (-1)^n$) le critère spécial des séries alternées.

EXEMPLE. Si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$, les sommes partielles de la série de terme général $b_n = \mathrm{e}^{in\theta}$ vérifient

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}},$$

donc, pour tout entier n

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} \right| \leq \frac{2}{2|\sin(\theta/2)|}.$$

On peut donc appliquer la règle d'Abel aux séries (de Fresnel) :

$$\sum_n \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha} \qquad \sum_n \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}, \qquad \sum_n \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$$

qui sont convergentes pour tout $\alpha > 0$.

REMARQUE. Il est raisonnable de penser à ce théorème si les résultats plus élémentaires (convergence absolue, séries alternées) ne donnent rien.

4 Sommation par paquets

Une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ étant donnée, on veut comparer la nature d'une série de terme général u_n avec celle de la série de terme général v_p, où

$$v_p = \sum_{n=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} u_n$$

(regroupement des u_n dont les indices sont entre $\varphi(p)$ et $\varphi(p+1) - 1$).

PROPOSITION. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_p$ converge.

Attention, la réciproque est fausse, comme le prouve la série de terme général $(-1)^n$ qui, sommée par paquets de deux termes consécutifs, forme la série convergente de terme général $v_p = 0$.
On a toutefois le résultat suivant.

THÉORÈME. La convergence de la série de terme général v_p entraîne celle de la série de terme général u_n dans chacun des trois cas suivants :
1) si tous les u_n sont réels positifs (resp : négatifs) ;
2) si tous les u_n sont réels et si, pour tout p, les termes groupés u_n, $\varphi(p) \leqslant n < \varphi(p+1)$, ont même signe ;
3) si la suite (u_n) tend vers 0 et que l'application définie sur $\mathbb{N}$: $p \mapsto \varphi(p+1) - \varphi(p)$ est bornée (la taille des paquets est bornée).

EXEMPLE. En utilisant le 3), la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente, car la série de terme général

$$v_p = u_{2p} + u_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{2p(2p+1)}$$

est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{4p^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

5 Produit de Cauchy

DÉFINITION. Si on considère deux séries de nombres complexes de termes généraux u_n, v_n, on appelle produit de Cauchy la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série w_n est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$