Elément de cours des exercices

Sommation des relations de comparaison

Pour les séries à termes positifs, on a les résultats suivants.

PROPOSITION. Si l'on considère deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels positifs telles que $b_n = O(a_n)$, et si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} b_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right).$$

PROPOSITION. Si l'on considère deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels positifs telles que $b_n = o(a_n)$, et si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} b_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right).$$

Le résultat le plus important concerne la relation $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$.

THÉORÈME. Si l'on considère deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels positifs telles que $b_n \sim_{n\to+\infty} a_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature et l'on a :
1) si $\sum a_n$ converge, alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k,$$

c'est-à-dire que les restes sont équivalents ;
2) si $\sum a_n$ diverge, alors

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

c'est-à-dire que les sommes partielles sont équivalentes.
Attention à ne pas appliquer ces résultats pour des suites (a_n) et (b_n) qui ne sont pas de signe constant.

EXEMPLES. 1) On a :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln(n+1) - \ln n = \ln(1+1/n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.$$

Les séries de termes généraux $\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x}$ et $1/n$ sont divergentes, donc, d'après le 2),

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln(n+1) \sim_{n\to+\infty} \ln n,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \ln n,$$

2) De même,

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Les séries de termes généraux $\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{x^2}$ et $1/n^2$ sont convergentes, donc, d'après le 1),

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Comme

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} = \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2} = \frac{1}{n},$$

on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.$$